Second Order Asymptotically Optimum Estimation in Autoregressive Models (時系列解析の推測 : 理論と応用)

赤平, 昌文

数理解析研究所講究録
418巻 1981年 26-40

Second Order Asymptotically Optimum Estimation in Autoregressive Models

赤平 昌文

はじめに

最近、推定の漸近理論において、独立な確率変数に基づく推定量の高次の漸近的有効性に関する統一理論がつくられた(e.g. [3], [4], [5]). ここでは独立でない場合の例として、1次の自己回帰過程における係数の推定について考察する. これまでは、$X_t = \theta X_{t-1} + U_t$ $(t=1,2,\cdots)$ となる自己回帰過程$\{X_t\}$について考えた([1], [2], [6]). ここで$\{U_t\}$はいずれも平均0, 分散σ^2をもつ密度関数fに従う独立な確率変数の列で、$|\theta|<1$とする. このときθの推定量が2次の漸近的有効となるための十分条件が求められ、さらにfが正規分布の密度関数ならば最小二乗推定量(LSE)が2次の漸近的有効となることが示された. ここでは従来得られた結果をまとめ、さらに次のようなもう少し一般の自己回帰過程$\{X_t\}$について考察する. $X_t - \mu = \theta(X_{t-1} - \mu) + U_t$ $(t=1,2,\cdots)$.

ただし $\{U_t\}$ はいずれも正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数の列とし、X_0 は $N(\mu, 1/(1-\theta^2))$ に従う確率変数で U_t とは独立とする．ここで $|\theta|<1$ と仮定する．このとき θ の２次の漸近的有効推定量を求める．

§1. 定義．

$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を標本空间、Θ をパラメータ空间で R^1 の開集合とする．$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ の T個の直積空间を $(\mathcal{X}^{(T)}, \mathcal{B}^{(T)})$ で表わす．
$(\mathcal{X}^{(T)}, \mathcal{B}^{(T)})$ 上に次のような確率測度の族 $\{P_{\theta,T} : \theta \in \Theta\}$ を考える $(T=1,2,\cdots)$．

$$P_{\theta,T}(B^{(T)}) = P_{\theta,T+1}(B^{(T)} \times \mathcal{X}), \quad \forall B^{(T)} \in \mathcal{B}^{(T)}.$$

$\mathcal{X}^{(T)}$ から Θ の中への $\mathcal{B}^{(T)}$-可測関数の列 $\{\hat{\theta}_T\}$ を θ の推定量とよぶ．以下の議論では簡単のために $\{\hat{\theta}_T\}$ を $\hat{\theta}_T$ と書くことにする．ある正数の単調増加列 $\{c_T\}$ $(\lim_{T\to\infty} c_T = \infty)$ に対して、推定量 $\hat{\theta}_T$ が $\{c_T\}$-一致推定量であるとは、任意の $\varepsilon>0$ と任意の $\vartheta \in \Theta$ に対して、十分小さな $\delta>0$ と十分大きな $L>0$ が存在して

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} P_{\theta,T}\{c_T|\hat{\theta}_T-\theta| \geqq L\} < \varepsilon$$

が成り立つことである．
これからの議論では $c_T=\sqrt{T}$ の場合のみを考えている．
$\{\sqrt{T}\}$-一致推定量 $\hat{\theta}_T$ が２次の漸近的中央値不偏(AMU)で

あるとは、任意の$\vartheta \in \Theta$に対して、$\delta > 0$が存在して

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \sqrt{T}\left| P_{\theta,T}\{\hat{\theta}_T \leqq \theta\} - \frac{1}{2}\right| = 0 \ ;$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \sqrt{T}\left| P_{\theta,T}\{\hat{\theta}_T \geqq \theta\} - \frac{1}{2}\right| = 0$$

が成り立つことと定義する.

2次のAMU推定量$\hat{\theta}_T$について　$F_\theta(a) + \frac{1}{\sqrt{T}} G_\theta(a)$が2次の漸近分布であるとは

$$\lim_{T\to\infty} \sqrt{T}\left| P_{\theta,T}\{\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) \leqq a\} - F_\theta(a) - \frac{1}{\sqrt{T}} G_\theta(a)\right| = 0$$

となることであると定義する. $\hat{\theta}_T$を2次の漸近分布$F_\theta(\cdot) + \frac{1}{\sqrt{T}} G_\theta(\cdot)$をもつ2次のAMU推定量とする. $\theta_0\ (\in \Theta)$を任意に固定する. このとき帰無仮説$H^+ : \theta = \theta_0 + (a/\sqrt{T})\ (a > 0)$, 対立仮説$K : \theta = \theta_0$なる検定問題を考える. $\mathcal{U}_2$を2次のAMU推定量全体の集合とし、$\Phi_{\frac{1}{2}}$を$E_{\theta_0+(a/\sqrt{T}),T}(\phi_T) = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$を満たす検定関数列$\{\phi_T\}$の集合とする. $A_{\hat{\theta}_T,\theta} = \{c_T(\hat{\theta}_T - \theta) \leqq a\}$とおくと、$P_{\theta_0+(a/\sqrt{T}),T}(A_{\hat{\theta}_T,\theta_0}) = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$となるから$A_{\hat{\theta}_T,\theta_0}$の定義関数 (indicators) の列$\{\chi_{A_{\hat{\theta}_T,\theta_0}}\}$は$\Phi_{\frac{1}{2}}$に属する. 何故ならば$\hat{\theta}_T$が$\mathcal{U}_2$に属しているからである. もし

$$\sup_{\{\phi_T\}\in\Phi_{1/2}} \overline{\lim_{T\to\infty}} \sqrt{T}\left\{ E_{\theta_0,T}(\phi_T) - F^+_{\theta_0}(a) - \frac{1}{\sqrt{T}} G^+_{\theta_0}(a)\right\} = 0$$

ならば、　$F_{\theta_0}(a) \leqq F^+_{\theta_0}(a)$　でさらに　$F_{\theta_0}(a) = F^+_{\theta_0}(a)$のときは　$G_{\theta_0}(a) \leqq G^+_{\theta_0}(a)$　となる.

次に、帰無仮説$H^- : \theta = \theta_0 + (a/\sqrt{T})\ (a < 0)$, 対立仮説$K : \theta = \theta_0$なる検定問題を考える. 上の場合と同様にして、もし

$$\inf_{\{\phi_T\}\in\Phi_{1/2}} \lim_{T\to\infty} \sqrt{T}\left\{ E_{\theta_0,T}(\phi_T) - F^-_{\theta_0}(a) - G^-_{\theta_0}(a) \right\} = 0$$

ならば、$F_{\theta_0}(a) \geqq F^-_{\theta_0}(a)$ でさらに $F_{\theta_0}(a) = F^-_{\theta_0}(a)$ のときは $G_{\theta_0}(a) \geqq G^-_{\theta_0}(a)$ となる.

2次のAMU推定量 $\hat{\theta}_T$ が2次の漸近的有効であるとは、$\hat{\theta}_T$ の2次の漸近分布が2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界を attain すること、すなわち各 $\theta\in\Theta$ に対して

$$F_\theta(a) = \begin{cases} F^+_\theta(a) & (a>0); \\ F^-_\theta(a) & (a<0); \end{cases} \qquad G_\theta(a) = \begin{cases} G^+_\theta(a) & (a>0); \\ G^-_\theta(a) & (a<0) \end{cases}$$

となることであると定義する. ここで $a=0$ については、2次のAMUの条件から $F_\theta(0) = F^+_\theta(0) = F^-_\theta(0)$, $G_\theta(0) = G^+_\theta(0) = G^-_\theta(0)$ である.

$\hat{\theta}^*_T$ を上の意味で2次の漸近的有効推定量とし、$\hat{\theta}_T$ を任意の2次のAMU推定量とする. このとき任意の $\theta\in\Theta$, $a>0$, $b>0$ に対して

$$\lim_{T\to\infty} \sqrt{T}\left[P_{\theta,T}\left\{-a<\sqrt{T}(\hat{\theta}^*-\theta)<b\right\} - P_{\theta,T}\left\{-a<\sqrt{T}(\hat{\theta}_T-\theta)<b\right\}\right] \geqq 0$$

が成り立つ.

§2. 結果.

この節において次の(I),(II),(III)の場合にわけて議論を進める. (I)は X_0 の初期条件がない場合、(II)は X_0 の初期条件が存在する場合、(III)未知の平均(局外パラメータ)が

存在する場合．これからは $\mathcal{X}=R^1$, $\Theta=(-1,1)$ と仮定する．

(I) 次のような自己回帰過程 $\{X_t\}$ について考察する．

(2.1) $\qquad X_t=\theta X_{t-1}+U_t \qquad (t=1,2,\cdots,T)$,

ここで $X_0=0$ で $\{U_t\}$ はいずれも平均 0，分散 σ^2 をもつ密度関数 f に従う独立な確率変数の列とする．いま $|\theta|<1$ であると仮定する．さらに次のことを仮定する．任意の $u\in\mathcal{X}$ について $f(u)>0$ で f は4回連続微分可能で $(\partial^4/\partial u^4)\log f(u)$ は有界でかつ

$$\lim_{u\to\pm\infty} f(u)=\lim_{u\to\pm\infty} f'(u)=\lim_{u\to\pm\infty} f''(u)=0\ ;\quad E_f(U_t^4)<\infty$$

が成り立つ．$\psi(u)=\log f(u)$ とおく．これらの仮定の下で2次のAMU推定量 $\hat{\theta}_n$ が2次の漸近的有効であるための十分条件は、$\hat{\theta}_n$ の2次の漸近分布が

$$\Phi\left(\frac{a\sigma\sqrt{I}}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)+\phi\left(\frac{a\sigma\sqrt{I}}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\left\{\frac{a^2\sigma\sqrt{I}\,\theta}{\sqrt{T}(1-\theta^2)^{3/2}}+\frac{a^2\sqrt{1-\theta^2}\,\mu_3}{6\sigma\sqrt{IT}(1-\theta^3)}(3J+K)\right\}$$

で与えられることである([1])．ここで $\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}\phi(v)dv$ で $\phi(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}$ であり $I=E_f[\{\psi'(U)\}^2]$, $J=E_f[\psi'(U)\psi''(U)]$, $K=E_f[\{\psi'(U)\}^3]$, $\mu_3=E_f(U^3)$ とする．

θ の LSE $\hat{\theta}_{LS}$ は $\left(\sum_{t=2}^{T}X_tX_{t-1}\right)/\sum_{t=2}^{T}X_{t-1}^2$ で与えられる．ここで f は正規分布の密度関数と仮定する．$\hat{\theta}_{LS}$ を2次のAMU推定量にするために $\hat{\theta}_{LS}^*=\left(1+\frac{1}{T}\right)\hat{\theta}_{LS}$ と修正すれば、$\hat{\theta}_{LS}^*$ は2次の漸近的有効となる([1])．

また θ の Yule-Walker 推定量 $\hat{\theta}_{YW}=(\sum_{t=2}^{T}X_tX_{t-1})/\sum_{t=1}^{T}X_t^2$ について考える．f を正規分布の密度関数と仮定し、$\hat{\theta}_{YW}$ を2次の AMU 推定量となるようにするために $\hat{\theta}^*_{YW}=(1+\frac{2}{T})\hat{\theta}_{YW}$ と修正すれば、$\hat{\theta}^*_{YW}$ は2次の漸近的有効になる（[6]）.

(II)　(2.1) の自己回帰過程において、$E(X_0)=0$, $V(X_0)=\sigma^2$ で $\{U_t\}$ はいずれも平均0、分散1をもつ確率変数の列で、各 t について U_t と X_0 は独立であるとする．X_0 の初期条件を考慮していることが (I) の場合と異なるところである．

$(X_0, X_1, \cdots, X_T)$ の同時密度関数を $L(\theta)=L(\theta : x_0, x_1, \cdots, x_T)$ とする．このとき次のことを仮定する．

(A.1). $\{(x_0, x_1, \cdots, x_T) : L(\theta : x_0, x_1, \cdots, x_T)>0\}$ が θ に依存しない.

(A.2). a.a. $(x_0, x_1, \cdots, x_T)$ について $L(\theta)$ は θ に関して3回連続微分可能.

(A.3). 各 $\theta \in \Theta$ について

$$0<I(\theta)=\frac{1}{T}E_\theta[\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)\}^2]=-\frac{1}{T}E_\theta[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta)]<\infty$$

が成り立つ.

(A.4). $$J(\theta)=\frac{1}{T}E_\theta[\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta)\}\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)\}]\ ;$$

$$K(\theta)=\frac{1}{T}E_\theta[\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)\}^3]$$

が存在してかつ

$$\frac{1}{T}E_\theta[\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\log L(\theta)] = -3J(\theta)-K(\theta)$$

が成り立つ.

θ の最尤推定量 (MLE) を $\hat{\theta}_{ML}$ で表わすと $\hat{\theta}_{ML}$ の stochastic expansion は

$$(2.2)\quad \sqrt{T}(\hat{\theta}_{ML}-\theta)=\frac{Z_1(\theta)}{I(\theta)}+\frac{Z_1(\theta)Z_2(\theta)}{I(\theta)^2\sqrt{T}}-\frac{3J(\theta)+K(\theta)}{2I(\theta)^3\sqrt{T}}Z_1(\theta)^2+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

で与えられる．ここで

$$Z_1(\theta)=\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta),\quad Z_2(\theta)=\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta)-E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta)\right]\right\}$$

とする．

ゆえに $\hat{\theta}_{ML}$ を2次の AMU となるように修正した推定量を $\hat{\theta}^*_{ML}$ とすれば、独立同一分布の場合（[3]）と同様にして、次の定理を得る．

定理 2.1（[2]）．条件（A.1）～（A.4）が成り立つと仮定する．このとき $\hat{\theta}^*_{ML}$ は2次の漸近的有効推定量である．

さらに X_0, U_t がそれぞれ正規分布 $N(0,1/(1-\theta^2))$, $N(0,1)$ に従うと仮定する．このような $\{X_t\}$ が定常過程となることは明らかである．このとき MLE $\hat{\theta}_{ML}$ の stochastic expansion は

$$\begin{aligned}(2.3)\quad \sqrt{T}(\hat{\theta}_{ML}-\theta)=&-\frac{2\theta}{\sqrt{T}}+\frac{2\theta(1-\theta^2)}{\sqrt{T}}X_0^2+\frac{2(1-\theta^2)}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}U_tX_{t-1}\\&-\frac{(1-\theta^2)^2}{T\sqrt{T}}\left(\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2\right)\sum_{t=1}^{T}U_tX_{t-1}\\&+\frac{(1-\theta^2)^3\{3J(\theta)+K(\theta)\}}{2T\sqrt{T}}\left(\sum_{t=1}^{T}U_tX_{t-1}\right)^2+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\end{aligned}$$

となる．

$E(U_t^3)=0$ であるから、(2.3)の右辺の5番目の項は $T^{-1/2}$ の order までは $\hat{\theta}_{ML}$ の（2次の）漸近分布に影響しない．また $E(X_0^2U_tX_{t-1})=0$ $(t=1,\cdots,T)$ であるから、(2.3)の右辺の

2番目の項は $T^{-1/2}$ の order までは $\hat{\theta}_{ML}$ の（2次の）漸近分布に影響しない.

一方、LSE $\hat{\theta}_{LS} = \sum_{t=1}^{T} X_t X_{t-1} / \sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2$ の stochastic expansion は、

$$(2.4)\quad \sqrt{T}(\hat{\theta}_{LS}-\theta) = \frac{2(1-\theta^2)}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} U_t X_{t-1} - \frac{(1-\theta^2)^2}{T\sqrt{T}} \left(\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2\right)\left(\sum_{t=1}^{T} U_t X_{t-1}\right) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

で与えられる. よって $\hat{\theta}_{LS}$ を2次の AMU となるように修正した推定量を $\hat{\theta}_{LS}^{*}$ とすれば、定理2.1, (2.2)〜(2.4) から次の定理を得る.

定理 2.2. ([2]). $\hat{\theta}_{LS}^{*}$ は2次の漸近的有効推定量である.

(注意). 上の議論からわかるように、X_0 の初期条件に無関係に MLE, LSE の2次の漸近的有効性が成り立つ. しかしながら、X_0 の初期条件は、MLE の3次以上の漸近的有効性には影響をおよぼすであろう.

(III) 次のような自己回帰過程 $\{X_t\}$ について考察する(*).

$X_t - \mu = \theta(X_{t-1} - \mu) + U_t \quad (t=1,\cdots,T)$, ここで $\{U_t\}$ はいずれも正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数の列とし、X_0 は $N(\mu, 1/(1-\theta^2))$ に従う確率変数で、各 t について U_t

(*) この model に関する問題提起は小河原正巳先生によって行われた.

と独立とする．このような$\{X_t\}$が定常過程となることは明らかである．いま$|\theta|<1$であり、$\mu=E(X_t)$ $(t=0,1,2,\cdots)$で$\mu\neq\theta$と仮定する．$X'_t=X_t-\mu$ $(t=0,1,2,\cdots)$とおく．このとき$(X'_0,X'_1,\cdots,X'_T)$の同時密度関数$L(\theta,\mu)$は、

$$(2.5)\quad L(\theta,\mu)=L(\theta,\mu;x'_0,x'_1,\cdots x'_T)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{(T+1)/2}}\sqrt{1-\theta^2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(x'_t-\theta x'_{t-1})^2 - \frac{1}{2}(1-\theta^2)x_0'^2\Big\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{(T+1)/2}}\sqrt{1-\theta^2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{x_0'^2+x_T'^2 + (1+\theta^2)\sum_{t=1}^{T-1}x_t'^2 - 2\theta\sum_{t=1}^{T}x'_{t-1}x'_t\Big\}\Big]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{(T+1)/2}}\sqrt{1-\theta^2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{x})\Big\}$$

で与えられる．

ここで$\underset{\sim}{x}'=(x'_0,x'_1,\cdots,x'_T)$で、$\Sigma^{-1}$は

$$(2.6)\qquad \Sigma^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\theta & & & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+\theta^2 & -\theta \\ 0 & & & -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

なる$(T+1)\times(T+1)$行列とする．

(i) θが既知ならば、μのMLE $\hat{\mu}_T$は

$$\hat{\mu}_T=\frac{1'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{x}}{1'\Sigma^{-1}1}$$

で与えられる．ここで $1'=(1,\cdots,1)$ とする．

(2.6)から

$$\hat{\mu}_T = \frac{X_0+X_T+(1-\theta)\sum_{t=1}^{T-1}X_t}{2+(1-\theta)(T-2)}$$

と表わされる．そこでもし<u>θが未知ならば</u>、θの一致推定量 $\hat{\theta}_T$ を $\hat{\mu}_T$ のθのところに代入して得られた

$$\hat{\mu}_T^* = \frac{X_0+X_T+(1-\hat{\theta}_T)\sum_{t=1}^{T-1}X_t}{2+(1-\hat{\theta}_T)(T-2)}$$

はまたμの一致推定量となる．また $\bar{X}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_t$ とおくと

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_T^* &= \frac{(1-\hat{\theta}_T)T\bar{X}+(X_0+\hat{\theta}_TX_T)}{(1-\hat{\theta}_T)T+2\hat{\theta}_T}\\ &= \frac{\bar{X}+\frac{1}{(1-\hat{\theta}_T)T}(X_0+\hat{\theta}_TX_T)}{1+\frac{2\hat{\theta}_T}{(1-\hat{\theta}_T)T}}\end{aligned}$$

であるから $\hat{\mu}_T^*-\bar{X}$ は $T\to\infty$ のとき 0 に確率収束する．

<u>(ii) μが既知ならば</u>、θの LSE $\hat{\theta}_{LS}$ は

$$\hat{\theta}_{LS} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\mu)(X_{t-1}-\mu)}{\sum_{t=1}^{T}(X_{t-1}-\mu)^2} \qquad (2.7)$$

で与えられる．(II) から議論から $\hat{\theta}_{LS}$ を2次のAMUとなるように修正した推定量は、2次の漸近的有効推定量となることが示される．

(iii) μが未知ならば、上の $\hat{\theta}_{LS}$ の μ のかわりに $\bar{X}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_t$ を代入した推定量

$$\hat{\theta}^*_{LS} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(X_{t-1}-\bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_{t-1}-\bar{X})^2}$$

を考える．この推定量 $\hat{\theta}^*_{LS}$ は (θ,μ) の十分統計量の関数になっている．実際、(2.5) から

$$\begin{aligned}
L(\theta,\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{(T+1)/2}}\sqrt{1-\theta^2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{(x_0-\mu)^2+(x_T-\mu)^2 \\
&\quad +(1-\theta^2)\sum_{t=1}^{T-1}(x_t-\mu)^2-2\theta\sum_{t=1}^{T}(x_{t-1}-\mu)(x_t-\mu)\Big\}\Big] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{(T+1)/2}}\sqrt{1-\theta^2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{x_0^2+x_T^2-2\mu(x_0+x_T) \\
&\quad +2\mu^2+(1-\theta^2)\Big(\sum_{t=1}^{T-1}x_t^2-2\mu\sum_{t=1}^{T-1}x_t+(T-1)\mu\Big) \\
&\quad -2\theta\Big(\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}x_t-\mu\Big(\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}+\sum_{t=1}^{T}x_t\Big)+\mu^2\Big)\Big\}\Big]
\end{aligned}$$

となるから (θ,μ) の十分統計量は

$$S(X_0,X_1,\cdots,X_T)=\Big(\sum_{t=1}^{T-1}X_t^2,\ \sum_{t=1}^{T}X_{t-1}X_t,\ \sum_{t=1}^{T-1}X_t,\ X_0, X_T\Big)$$

によって与えられるから、$\hat{\theta}^*_{LS}$ が S の関数であることは明らかである．(2.7) で与えられた $\hat{\theta}_{LS}$ を $\hat{\theta}_{LS}=A_0/B_0$ とおく．ただし $A_0=\sum_{t=1}^{T}(X_t-\mu)(X_{t-1}-\mu)$，$B_0=\sum_{t=1}^{T}(X_{t-1}-\mu)^2$ とする．

$\hat{\mu}$をμの漸近的有効推定量とし、$\hat{\theta}_{LS}$ の μ のかわりに $\hat{\mu}$ を代入した推定量を

$$\hat{\theta}^{**}_{LS}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\hat{\mu})(X_{t-1}-\hat{\mu})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\hat{\mu})^2}=\frac{A_1}{B_1}$$

とおく．ここで $A_1=\sum_{t=1}^{T}(X_t-\hat{\mu})(X_{t-1}-\hat{\mu})$，$B_1=\sum_{t=1}^{T}(X_t-\hat{\mu})^2$ とする．このとき

$$(2.8)\quad \sqrt{T}\,(\hat{\theta}_{LS}^{**}-\hat{\theta}_{LS})=\sqrt{T}\left(\frac{A_0}{B_0}-\frac{A_1}{B_1}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{T}\{A_0(B_1-B_0)-(A_1-A_0)B_0\}}{B_0B_1}$$
$$=\frac{\sqrt{T}\left\{\frac{A_0}{T}\frac{1}{T}(B_1-B_0)-\frac{B_0}{T}\frac{1}{T}(A_1-A_0)\right\}}{\frac{B_0B_1}{T^2}}$$

となる．ここで

$$\frac{A_0}{T}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\mu)(X_{t-1}-\mu)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_t'X_{t-1}' \quad ;$$
$$\frac{B_0}{T}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_{t-1}-\mu)^2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}'^2$$

であるから、A_0/T と B_0/T は $T\to\infty$ のとき、それぞれ $\theta/(1-\theta^2)$ と $1/(1-\theta^2)$ に確率収束することがわかる．

また

$$(2.9)\quad \frac{1}{T}(B_1-B_0)=\frac{1}{T}\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_{t-1}-\hat{\mu})^2-\sum_{t=1}^{T}(X_{t-1}-\mu)^2\right\}$$
$$=-\frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}(\hat{\mu}-\mu)+(\hat{\mu}^2-\mu^2)$$
$$=(\hat{\mu}-\mu)(\hat{\mu}+\mu-2\bar{X}_{t-1}) \quad ;$$

$$(2.10)\quad \frac{1}{T}(A_1-A_0)=\frac{1}{T}\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\hat{\mu})(X_{t-1}-\hat{\mu})-\sum_{t=1}^{T}(X_t-\mu)(X_{t-1}-\mu)\right\}$$
$$=-\bar{X}_t(\hat{\mu}-\mu)-\bar{X}_{t-1}(\hat{\mu}-\mu)+(\hat{\mu}-\mu)^2$$
$$=(\hat{\mu}-\mu)(\hat{\mu}+\mu-\bar{X}_t-\bar{X}_{t-1})$$

となる．ただし $\bar{X}_{t-1}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}$，$\bar{X}_t=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_t$ とする．

よって (2.8)～(2.10) から、十分大きな T に対して

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{LS}^{**}-\hat{\theta}_{LS}) \sim \frac{\sqrt{T}\left[\frac{\hat{\mu}-\mu}{1-\theta^2}\left\{\theta(\hat{\mu}+\mu-2\bar{X}_{t-1})-(\hat{\mu}+\mu-\bar{X}_t-\bar{X}_{t-1})\right\}\right]}{\frac{1}{1-\theta^2}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1}(X_{t-1}-\hat{\mu})^2}$$

となる．ここで $\hat{\mu}$ として $\bar{X}_t$ をとれば、$\hat{\theta}_{LS}^{**}$ は $\hat{\theta}_{LS}^{*}$ であり

$$\frac{B_1}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_{t-1}-\bar{X}_t)^2$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\mu)^2-2(\bar{X}_t-\mu)(\bar{X}_{t-1}-\mu)+(\bar{X}_t-\mu)^2$$

となる．また

$$\bar{X}_{t-1} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1} = \bar{X}_t+\frac{1}{T}(X_0-X_T)$$

であるから B_1/T は $T\to\infty$ のとき $1/(1-\theta^2)$ に確率収束する．ゆえに、十分大きな T に対して

(2.11) $$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{LS}^{*}-\hat{\theta}_{LS}) \sim \frac{\sqrt{T}\left[\frac{\bar{X}_t-\mu}{1-\theta^2}\left\{-\theta(\bar{X}_t-\mu)+(\bar{X}_t-\mu)\right\}\right]}{\frac{1}{(1-\theta^2)^2}}$$

$$= (1-\theta)(1-\theta^2)\sqrt{T}(\bar{X}_t-\mu)^2$$

となる．また (2.4) から $\hat{\theta}_{LS}$ の stochastic expansion は、

(2.12) $$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{LS}-\theta) = \frac{2(1-\theta^2)}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}U_t X'_{t-1}-\frac{(1-\theta^2)^2}{T\sqrt{T}}\left(\sum_{t=1}^{T}X'^2_{t-1}\right)\left(\sum_{t=1}^{T}U_t X'_{t-1}\right) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

によって与えられる．

ここで

$$(2.13)\qquad E\left[\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\sum_{t=1}^{T} v_t x'_{t-1}\right)\sqrt{T}\,\bar{x}'^2_t\right] = O\left(\frac{1}{T}\right)\ ;$$

$$(2.14)\qquad E\left[\frac{1}{T\sqrt{T}}\left(\sum_{t=1}^{T} x'^2_{t-1}\right)\left(\sum_{t=1}^{T} v_t x'_{t-1}\right)\sqrt{T}\,\bar{x}'^2_t\right] = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

となる．ただし $\bar{x}'_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x'_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu) = \bar{x}_t - \mu$ となる．

そこで $\hat{\theta}_{LS}$ の stochastic expansion は、

$$(2.15)\qquad \sqrt{T}(\hat{\theta}^*_{LS}-\theta) = \sqrt{T}(\hat{\theta}^*_{LS}-\hat{\theta}_{LS}) + \sqrt{T}(\hat{\theta}_{LS}-\theta)$$

と考えられる．このとき

$$(2.16)\qquad V(\sqrt{T}(\hat{\theta}^*_{LS}-\hat{\theta}_{LS})) = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

となるから、(2.11)～(2.16) から $\hat{\theta}_{LS}$ と $\hat{\theta}^*_{LS}$ の $T^{-1/2}$ の order まで (2次の) 漸近分布は等しくなることがわかる．従って $\hat{\theta}^*_{LS}$ を2次のAMUとなるように修正した推定量を $\tilde{\theta}^*_{LS}$ とすれば、次の定理が成り立つ．

<u>定理 2.3.</u> $\tilde{\theta}^*_{LS}$ は2次の漸近的有効推定量である．

上の議論の途中で漸近的有効推定量 $\hat{\mu}$ として $\bar{x}_t$ をとって考えたけれども、適当な条件を仮定すれば $\hat{\mu}$ のままで同様の結論を得ることは可能となるであろう．

References

[1] Akahira,M.(1975). A note on the second order asymptotic efficiency of estimators in an autoregressive process. Rep.Univ.Electro-Comm., 26, 143-149.

[2] Akahira,M.(1979). On the second order asymptotic optimality of estimators in an autoregressive process. Rep.Univ. Electro-Comm., 29, 213-218.

[3] Akahira,M. and Takeuchi,K.(1981). Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency. Lecture Notes in Statistics 7, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (To be published).

[4] Ghosh,J.K., Sinha,B.K. and Wieand,H.S.(1980). Second order efficiency of the mle with respect to any bounded bowl-shaped loss function. Ann.Statist., 8, 506-521.

[5] Pfanzagl,J. and Wefelmeyer,W.(1978). A third order optimum property of the maximum likelihood estimator. J.Multivariate Anal., 8, 1-29.

[6] Takeuchi,K. and Akahira,M.(1977). Second order asymptotic efficiency in estimation of time series. (In Japanese). Sûrikaisekikenkyûsho Kôkyûroku (Proc.Symp., Res.Inst. Math.Sci., Kyoto Univ.), 312, 109-114.